La hiérarchie des graphes k-chemins séparables

Emilie Diot* Cyril Gavoille*†

22 septembre 2010

Dans cette présentation, nous nous intéresserons à la séparabilité des graphes ayant une pondération sur les arêtes et sur les sommets. Intuitivement, un graphe pondéré est k-chemins séparable si, en retirant k plus courts chemins, les composantes connexes du graphe résultant ont un poids qui ne dépasse pas la moitié du poids total du graphe.

Plus précisément, étant donnés un graphe G et une pondération ω appliquée à chaque sommet et arête de G, le poids de (G, ω) est la somme des poids des sommets de G. On le note $\omega(G)$. Le poids des arêtes nous permet de définir les plus courts chemins.

Un *demi-séparateur* d'un graphe pondéré (G, ω) est un sous-ensemble S de sommets tel que chaque composante connexe de $G \setminus S$ a un poids d'au plus $\omega(G)/2$. Un *k-chemins séparateur* est un demi-séparateur induit par un sous-graphe $P_0 \cup P_1 \cup \ldots$ de G où chaque P_i est un ensemble de k_i plus court chemin de $G \setminus \bigcup_{j<i} P_j$ avec $\sum_i k_i \leqslant k$.

Un graphe pondéré (G, ω) est *k-chemins séparable* si tout sous-graphe induit admet un k-chemins séparateur.

Il a été montré que ces graphes ont des propriétés intéressantes dans la résolution des "*Object Location Problems*" tels que la navigation dans les petits mondes, le routage compact ou encore les oracles de distances.

Pour chaque entier k, on note PS_k la famille de tous les graphes G qui sont k-chemins séparables pour toute pondération. On peut montrer que tout graphe planaire est dans PS_3, et que, de manière plus générale, tout graphe qui exclut un mineur H est dans PS_{k_H} pour une certaine constante k_H.

Nous montrerons que, pour chaque k, la famille PS_k est close par mineur. Une conséquence du "*Graph Minor Theorem*" de Robertson et Seymour est que, pour chaque k, la liste des mineurs interdits pour PS_k est finie et que l'appartenance à cette famille peut être décidée en temps polynomial.

Nous avons investi plus en détail la famille PS_1 pour laquelle nous donnerons une liste de mineurs interdits minimaux en vue de sa caractérisation.

Théorème 1 *Soit G un graphe appartenant à PS_1. Alors, soit G est isomorphe à $K_{3,3}$, ou il est planaire.*

Malheureusement la liste que nous donnerons n'est pas exhaustive. Nous pouvons cependant certifier qu'il existe exactement 6 mineurs interdits avec au plus 6 sommets, dont K_5 et $K_{3,3}$ auquel on ajoute une arête.

*Université de Bordeaux, LaBRI, France. E-mail: {diot,gavoille}@labri.fr

†Le second auteur est aussi membre de L'IUF. Les deux auteurs sont financés par le projet ANR "ALADDIN", et membres de l'équipe-projet commune LaBRI-INRIA Bordeaux Sud-Ouest "CÉPAGE".